Grenzwertsätze und Asymptotenbestimmung

Die Grenzwertsätze gelten NUR, wenn die Grenzwerte der einzelnen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ existieren (d.h. eine <u>reelle Zahl</u> ergeben und <u>NICHT unendlich</u> sind)!

<u>Voraussetzung:</u>

$$\lim_{x \to p} f(x) = a \quad \text{und} \quad \lim_{x \to p} g(x) = b, \quad \text{wobei} \quad a, b \in \mathrm{I} \quad \text{und} \quad p \in \mathrm{I} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

<u>Dann gilt:</u>

① $\lim\limits_{x \to p} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to p} f(x) + \lim\limits_{x \to p} g(x) = a + b$

② $\lim\limits_{x \to p} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to p} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to p} g(x) = a \cdot b$

Wenn außerdem $b \neq 0$ gilt, existiert auch der Grenzwert des Quotienten:

③ $\lim\limits_{x \to p} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to p} f(x)}{\lim\limits_{x \to p} g(x)} = \dfrac{a}{b}$

Daher ist bei der Bestimmung einer schrägen Asymptote die Polynomdivision unumgänglich.

<u>Beispiel:</u> $u(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{5x + 5} \;\Rightarrow\;$ Polynomdivision liefert: $u(x) = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} - \dfrac{3}{5x+5}$.

Wir suchen zur Bestimmung der Asymptote <u>nicht</u> die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} u(x)$, denn die wären nach wie vor $\pm\infty$.

Wir betrachten aber die einzelnen Summanden und stellen fest, dass der letzte für betragsmäßig große *x* gegen Null geht. Wenn wir also die vorderen Summanden zu einer neuen Funktion $v(x) = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$ zusammenfassen, dann können wir sagen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[u(x) - v(x)\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{5x+5} = 0$$

Das bedeutet also, dass der Abstand zwischen dem Graphen der ursprünglichen Funktion *u* und der Geraden *v* für betragsmäßig große *x* beliebig klein wird $\Rightarrow$ *v* ist eine Asymptote zu *u*.

<u>Falsche Vorgehensweise:</u>

Wenn man hingegen ein *x* ausklammert und kürzt, ergibt sich $u(x) = \dfrac{x + 3 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{5}{x}}$.

Dies ist nicht verboten, und man könnte nun annehmen, dass der Grenzwert der Funktion einfach $\dfrac{x+3}{5}$ beträgt, da die Terme $-\frac{1}{x}$ und $\frac{5}{x}$ für große *x* keine Rolle mehr spielen.

Hierfür verwenden wir aber im Kopf den 3. Grenzwertsatz, und das dürfen wir in diesem Fall gar nicht, da die Voraussetzung im Zähler nicht erfüllt ist:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + 3 - \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$, also keine reelle Zahl *a*.